

## Chapitre 3. Séries numériques

### I. Généralités

#### 1°) Définitions et notations

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels ou complexes. On considère la nouvelle suite

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Définition 1: On appelle série de terme général  $u_n$  la suite de terme général  $S_n$ .

Définition 2: On dit que la série de terme général  $u_n$  a pour somme  $S$  si la suite  $S_n$  tend vers  $S$  lorsque  $n$  tend vers l'infini

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Si la limite est finie, on dit que la série converge.  
Si la limite est infinie, ou n'existe pas, on dit que la série diverge.

Notation: Série de terme général  $u_n$ , Série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$   
ou série  $\sum u_n$

Définition 3 Si la série  $\sum u_n$  a pour somme  $S$  (finie) on appelle reste d'ordre  $k$  de la série la quantité  $R_k = S - S_k$ .

Définition 4: le terme  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  est appelé somme partielle d'ordre  $n$ .

Exemples: 1°) Séries géométriques

On considère la suite  $u_n = a q^n$ ,  $a > 0$ ,  $q > 0$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si  $q < 1$ ,  $S_n \rightarrow \frac{a}{1-q}$ . La série  $\sum aq^n$  converge

Si  $q > 1$   $q^{n+1} \rightarrow +\infty$ ,  $\sum_{k=0}^n aq^k \rightarrow -\infty$  donc  $\sum aq^n$  diverge

Si  $q = 1$   $S_n = (n+1)a \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum aq^n$  diverge.

Exemple 2:

2° Soit la suite  $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $n \geq 1$ .

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = U_1 + \dots + U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On dit que la série  $\sum U_n = \sum \frac{1}{n(n+1)}$  est convergente et sa somme vaut 1.

Remarque: La nature d'une série ne change pas si on change un nombre fini de ses termes.

En effet. Soient

$$S_n = \underbrace{U_0 + U_1 + \dots + U_p}_a + U_{p+1} + \dots + U_n$$

$$S'_n = \underbrace{U'_0 + U'_1 + \dots + U'_p}_b + U_{p+1} + \dots + U_n$$

$$S_n - S'_n = a - b \quad (\Rightarrow) \quad S_n = S'_n + (a - b)$$

$$(S_n) \text{ cv} \Leftrightarrow (S'_n) \text{ cv.}$$

(\*)

Structures algébriques

1° Soient  $\sum U_n$  et  $\sum v_n$  deux séries. On appelle série somme de  $\sum U_n$  et  $\sum v_n$  la série de terme général:  $U_n + v_n$ .

2° Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On donne un sens au produit de  $\sum U_n$  par  $\lambda$  en écrivant

$$\lambda \left( \sum U_n \right) = \sum \lambda U_n$$

3° L'ensemble des séries numériques convergentes muni des deux lois  $+$  et  $(\cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).



## II. Conditions de convergence des séries

Définition: Une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall q > p \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Proposition: Une série est convergente  
Ssi et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Rightarrow$  la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge

$\Leftrightarrow (S_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall q > p \geq N \quad |S_q - S_p| = \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$  La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est de Cauchy.

Proposition 2 Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série convergente Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Preuve:  $u_n = S_{n+1} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0.$

⚠ Remarque Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  n'est pas nécessairement convergente!

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  n'est pas de Cauchy; car

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  n'est pas convergente et pourtant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Définition : Une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est dite absolument convergente si la série  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  est convergente.

Proposition 3 Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve : Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série absolument convergente.

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q > p \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| \leq \sum_{k=p+1}^q |u_k| \leq \varepsilon.$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est de Cauchy et par suite, elle est convergente.

Remarque : La réciproque de la proposition 3 n'est pas toujours vraie. Une série peut être convergente sans être absolument convergente.

On verra que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente mais  $\sum_{n \geq 1} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente (car n'est pas de Cauchy)

La notion de convergence absolue, nous ramène à étudier les séries numériques à termes positifs, qui constituent le cas le plus simple. L'hypothèse de positivité des termes de la série équivaut à supposer que les sommes partielles forment une suite croissante. La comparaison avec une série géométrique permet souvent de conclure.



### III Séries numériques à termes positifs. III.1. Généralités.

Rappel. Une suite de nombres réels croissante est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

Définition. Une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est à termes positifs si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

Théorème 1. Une série à termes positifs  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \text{ tel que } S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  t.q.  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est croissante.

Donc, d'après le rappel :

La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est convergente si, et seulement si,  $(S_n)_{n \geq 0}$  est majorée.

Exemple Soit la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  où  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

$$\text{On a } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Alors } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

$(S_n)_{n \geq 1}$  est majorée et par suite  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  est convergente (elle converge vers 1).

Théorème 2. Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  alors

$$\text{i) } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge}$$

$$\text{ii) } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge}$$

Preuve : i) On a  $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$ . Puisque  $\sum_{n \geq 0} v_n$  est convergente, ceci implique que  $\sum_{k=0}^n v_k$  est majorée, il en est de même de  $\sum_{k=0}^n u_k$ . Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente.

ii) Il suffit de prendre la contraposée.

Exemples.

1° La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente.

$\forall n \geq 2, 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ . Or  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$  est convergente.

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente.

2°  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  est divergente car  ~~$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$~~   ~~$\forall n \geq 1$~~   
 $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \forall n \geq 1$

et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

Corollaire. Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs tels que il existe deux constantes positives  $a$  et  $b$  vérifiant :

$$a u_n \leq v_n \leq b u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors les deux séries sont de même nature.

REMARQUES : Tous ces résultats de comparaison restent valables si on suppose que les inégalités sont vraies seulement à partir d'un certain  $n_0 \in \mathbb{N}$ .



2° On a donc une méthode pour étudier les séries à termes positifs : On les compare, en majorant ou en minorant, au stock des séries dont on connaît la nature.

Voici une conséquence très utile du théorème 2.

Théorème 3. Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont deux séries à termes positifs, et si  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont des suites équivalentes quand  $n \rightarrow +\infty$  (c'est à dire  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ ) alors les deux séries sont de même nature.

Preuve. Pour  $n$  assez grand, on a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$$

D'après le corollaire précédent,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

Exemple.  $\sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$  est convergente.

De même  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1\right)$  est convergente.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème 4. Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$  fini alors

$\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

Preuve. Pour  $n$  assez grand, on a

$$\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$$

Alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature.

Remarque i Si  $l = 0$ , le résultat du théorème 4 n'est pas valable. Par exemple :  $u_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $v_n = 1$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ,  $\sum u_n$  est convergente et  $\sum v_n$  est divergente.

ii) De même pour  $l = +\infty$ . On peut prendre  $u_n = 1$  et  $v_n = \frac{1}{n^2}$  et on aura la conclusion.

### III. 3. Comparaison à une intégrale généralisée

Théorème. Soit  $f$  une fonction positive, continue et décroissante à partir de  $x \geq a$ .

Posons  $u_n = f(n)$ .

Alors la série  $\sum u_n$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  sont de même nature.

Preuve. On suppose que  $f$  est positive et décroissante pour  $x \geq 1$  (sinon on modifie  $f$ ).

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , on a  $\forall x \in [k, k+1]$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

$$u_{k+1} = f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k) = u_k$$

La somme membre à membre implique

$$\sum_{k=2}^n u_k \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

Par Passage à la limite, on conclut.

Exemple Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$ .  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est dite une série de Riemann

On sait que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .  
(à vérifier !)  
Donc, une série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .



### Proposition (Comparaison avec les séries de Riemann)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

i°/ S'il existe  $M > 0$ ,  $\alpha > 1$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que  $n^\alpha u_n \leq M$  pour tout  $n \geq N$  (en particulier si  $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  fini), alors la série  $\sum u_n$  est convergente.

ii°/ S'il existe  $M > 0$ ,  $\alpha \leq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $n^\alpha u_n \geq M$  pour tout  $n \geq N$  (en particulier si  $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  ( $l \neq 0$ ) ou bien  $+\infty$ ), alors la série est divergente.

Preuve. Evidente.

Exemple Série de Bertrand. Ce sont les séries de la

forme  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ .  $\alpha, \beta > 0$ .

i°/ Si  $\alpha > 1$ , alors  $n^\alpha \cdot \left( \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Donc la série converge.

ii°/ Si  $\alpha < 1$ , alors  $n^\alpha \left( \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Donc la série diverge.

iii°/ Si  $\alpha = 1$  et  $\beta \neq 1$  alors  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \left[ \frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} \right]_2^{+\infty}$ .  
Donc la série converge si  $\beta > 1$  et diverge si  $\beta < 1$ .

iv°/ Si  $\alpha = 1 = \beta$ ;  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln(x))]_2^{+\infty}$ .  
Donc la série diverge.

En résumé, une série de Bertrand converge si, et seulement si,  
 $\alpha > 1$  ou bien  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .  
 $\beta > 0$

## Comparaison à une série géométrique

### Proposition : (Critère de Cauchy)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

i) s'il existe  $0 < k < 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

on ait  $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ ; alors la série  $\sum u_n$  est convergente

ii) s'il existe  $k > 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$

$\sqrt[n]{u_n} > k$  alors la série  $\sum u_n$  diverge et

$u_n$  ne tend pas vers 0, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Preuve

i)  $\sqrt[n]{u_n} \leq k \Rightarrow u_n \leq k^n$ .

Or la série géométrique  $\sum k^n$  est convergente pour  $0 < k < 1$

alors  $\sum u_n$  est convergente.

ii)  $\sqrt[n]{u_n} > k (> 1) \Rightarrow u_n > k^n (> 1)$  alors

$u_n \not\rightarrow 0$  et par suite  $\sum u_n$  diverge.

### Règle pratique (Règle de Cauchy)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs telle que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  alors

1) si  $l < 1$ ,  $\sum u_n$  est convergente

2) si  $l > 1$ ,  $\sum u_n$  est divergente

3) si  $l = 1$ , on ne peut rien conclure.

Preuve. Pour  $l < 1$  et  $l > 1$ , on utilise la définition de la limite et le critère de Cauchy.



### Exemples

1°)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ . On a  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ . D'où la série est convergente.  
(Règle de Cauchy)

2°)  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ . On a  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1$ . D'où la série est convergente.  
(Règle de Cauchy)

3°)  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3 + \sin n}\right)^n$ . On a  $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3 + \sin n}$

Or  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 + \sin n} \leq \frac{1}{2}$ . Et en appliquant le Critère de Cauchy

On déduit que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente.

Proposition. Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pour } n \geq N. \text{ Alors}$$

i) Si la série  $\sum v_n$  est convergente, alors  $\sum u_n$  est convergente

ii) Si la série  $\sum u_n$  est divergente, alors  $\sum v_n$  est divergente

Preuve 1°)  $\forall n \geq N$ , on a  $\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N} \Rightarrow u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$

Or  $\frac{u_N}{v_N}$  est une constante, et par suite si  $\sum v_n$  est convergente

alors  $\sum u_n$  l'est aussi.

2°) De même  $\frac{v_N}{u_N} u_n \leq v_n$  et par suite si  $\sum u_n$  est divergente alors  $\sum v_n$  l'est aussi.

### Proposition (Critère d'Alembert)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

i) s'il existe  $k < 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k \forall n \geq N$  alors  $\sum u_n$  est convergente.

ii) s'il existe  $k \geq 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , t.q.  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k \forall n \geq N$  alors  $\sum u_n$  est divergente.

### Preuve

i)  $\forall n \geq N$  on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{k^{n+1}}{k^n}$ .

On pose  $v_n = k^n$ . Puisque  $k < 1$ , la série  $\sum v_n$  est ~~divergente~~ convergente.  
Alors  $\sum u_n$  est aussi convergente.

ii) De même  $\forall n \geq N$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k (> 1) \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{k^{n+1}}{k^n}$ .

On pose  $v_n = k^n$  ( $k \geq 1$ ).  $\sum v_n$  est divergente.

alors il en est de même de  $\sum u_n$ .

### Règle pratique (Règle de d'Alembert)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \text{ Alors.}$$

1) si  $l < 1$ ,  $\sum u_n$  est convergente.

2) si  $l > 1$ ,  $\sum u_n$  est divergente.

3) si  $l = 1$ , cas douteux.

Preuve. Pour  $l < 1$  et  $l > 1$ , on utilise la définition de la limite et le critère de d'Alembert.

### Exemples

1°/  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$  est convergente, car  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ .

2°/  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$  est convergente, car  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$   
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1} < 1$ .

Remarques 1°/ On préférera la règle de d'Alembert si  $(u_n)$  comporte des factorielles et celle de Cauchy s'il comporte des puissances  $n^{\text{èmes}}$ .

2°/ Règle de Duhamel. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n}{n}}$   $n \geq N$   $\alpha_n > 0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = l$ .  
 $\begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ l < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \\ l = 1 \text{ cas douteux.} \end{cases}$



## IV. Séries de signe quelconques

IV.1. Séries absolument convergentes (Voir précédemment)

### IV.2. Séries d'Abel

Définition (Série d'Abel) Une série d'Abel est une série de la forme  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n v_n$  vérifiant :

i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

ii) La série  $\sum_{n \geq 0} |v_n - v_{n+1}|$  est convergente

iii)  $\exists M > 0 \quad \forall q > p \geq 0 \quad \left| \sum_{k=p+1}^q \alpha_k \right| \leq M.$

Remarque Si la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est décroissante, alors l'hypothèse ii) de la définition de la série d'Abel est automatiquement vérifiée.

En effet  $\sum_{k=0}^n |v_k - v_{k+1}| = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - \underbrace{v_{n+1}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v_\infty}$

### Théorème

Toute série d'Abel est convergente.

Preuve : soit  $p < q$ . On note  $w_k = \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_k, k \geq p+1$

$$\begin{aligned} |\alpha_{p+1} v_{p+1} + \dots + \alpha_q v_q| &= |v_{p+1} w_{p+1} + v_{p+2} (w_{p+2} - w_{p+1}) + \dots + v_q (w_q - w_{q-1})| \\ &= |w_{p+1} (v_{p+1} - v_{p+2}) + \dots + w_{q-1} (v_{q-1} - v_q) + w_q v_q| \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{q-1} |w_k| |v_k - v_{k+1}| + |w_q| |v_q| \\ &\leq M \left( \sum_{k=p+1}^{q-1} |v_k - v_{k+1}| + |v_q| \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Les hypothèses d'une série d'Abel impliquent que :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q > p > N$ , on a :

•  $|v_q| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$  (car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ )

•  $\sum_{k=p+1}^{q-1} |v_k - v_{k+1}| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$  (car  $\sum |v_n - v_{n+1}|$  est convergente)

donc de Cauchy



Ainsi  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n v_n$  est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente.

De plus, si on fait tendre  $q \rightarrow +\infty$ , (\*) devient

$$\left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} \alpha_k v_k \right| \leq M \left( \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k - v_{k+1}| \right).$$

Exemples (Cas particuliers dans le cadre de la série d'Abel)

Exemple 1: Séries alternées

Définition: La série  $\sum u_n$  est dite alternée si pour tout

$$n, \text{ on a: } u_n = (-1)^n |u_n|.$$

ou encore si pour tout  $n$ ,  $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$ .

Proposition: Soit  $\sum u_n$  une série alternée telle que

la suite  $(|u_n|)_n$  est décroissante et tend vers 0,

alors  $\sum u_n$  est une série d'Abel. Donc convergente.

Preuve: On pose  $\alpha_n = (-1)^n$  et  $v_n = |u_n|$

La série  $\sum u_n = \sum (\alpha_n) |u_n| = \sum \alpha_n v_n$  vérifie les

hypothèses d'une série d'Abel. Donc convergente.

Exemple  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente

(\*)  [ETUSUP.com](http://ETUSUP.com)

Exemple 2 Séries trigonométriques

On prend  $(v_n)_n$  une suite décroissante vers 0 et  $\alpha_n = e^{inx}$  avec  $x \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). On a

$$\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_q = e^{i(p+1)x} [1 + \dots + e^{ix(q-(p+1))}] = e^{i(p+1)x} \left[ \frac{1 - e^{i(q-p)x}}{1 - e^{ix}} \right]$$

$$|\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_q| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|e^{ix/2} - e^{-ix/2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = M.$$

Alors les séries  $\sum_{n \geq 0} v_n \cos nx$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n \sin nx$ ,  $x \neq 2k\pi$  sont d'Abel

Donc convergentes  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$   $\alpha > 0$  et  $x \neq 2k\pi$  sont convergentes.

Exemples



Remarque : Pour des séries à termes de signe quelconque et non absolument convergentes, prendre un équivalent d'un terme général peut induire en erreur. Mais des développements limités sont parfois utiles.

Exemple :  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$  avec  $n \geq 2$  et  $a > 0$ .

On a  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$  au voisinage de 0 avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} = 0$ , alors

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2n^{2a}} (1 + \varepsilon'(n)) \text{ avec } \varepsilon'(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On pose  $v_n = \frac{1}{2n^{2a}} (1 + \varepsilon'(n))$ .  $v_n > 0$  à partir d'un certain rang et

Or  $\sum_n \frac{1}{2n^{2a}}$  converge ssi  $a > \frac{1}{2}$  (Série de Riemann)  $v_n \sim \frac{1}{2n^{2a}}$

•  $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^a}$  est une série alternée ( $a > 0$ ) convergente car  $\frac{1}{n^a}$  décroît vers 0.

Donc  $\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$  converge ssi  $a > \frac{1}{2}$ .

Mais si on prend  $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^a}$

Or  $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^a}$  est convergente  $\forall a > 0$  et  $\sum u_n$  diverge pour  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$ .

## II. Reste et Calcul approché de la somme d'une série

et erreur. Jusqu'à présent, on surtout vu des résultats permettant de conclure quant à la convergence ou à la divergence des séries. En général, on ne connaît pas leur somme exacte. Cependant on peut dans certains cas donner une valeur approchée. C'est l'objet de ce paragraphe.

Soit  $\sum u_n$  une série convergente et soit  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ .

On appelle erreur d'ordre N le nombre

$$E_N = |S - S_N| \text{ avec } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$



On appelle reste d'ordre  $N$  le nombre  $S - S_N$  noté  $R_N$ .

On peut facilement minorer  $E_N = |R_N|$  dans certains cas.

1°/ Série  $\sum u_n$  abs. convergente (par le critère de d'Alembert)

On a vu que  $\exists k \in [0, 1[$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq n_0$   $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq k$

Dans ce cas, on a

$$|R_N| \leq \frac{k}{1-k} |u_N| \text{ pour } N \geq n_0.$$

Exemple: On a  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$   
(Nombre d'Euler)

On pose  $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $u_n = \frac{1}{n!}$ .

On a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \quad \forall n \geq n_0$

$$|e - S_N| = \left| \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \dots \right| \quad k = \frac{1}{N+1}$$
$$\leq \frac{k}{1-k} \cdot u_N = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Ainsi  $|e - S_{12}| \leq \frac{1}{12 \cdot 12!}$

2°/ Série  $\sum u_n$  abs. convergente (Par le critère de Cauchy)

On a vu que  $\exists k \in [0, 1[$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq n_0$   $\sqrt[n]{|u_n|} \leq k$ .

Dans ce cas

$$|R_N| \leq \frac{k^{N+1}}{1-k} \quad \forall N \geq n_0.$$

Exemple:  $\sum_{n \geq 1} u_n$ ,  $u_n = \left( \frac{n+1}{2n} \right)^n$ . On applique le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = \left( \frac{n+1}{2n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < 1 \quad \forall n \geq N \geq 2.$$

Le reste d'ordre  $n$   $\# (n \geq N)$  a l'ordre alors

$$|R_n| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} = \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^{n+1} \times \frac{N}{N-1} \quad \forall n \geq N, N \geq 2.$$

3°/ Si la convergence est obtenue par la règle de Riemann

$\sum u_n$ ,  $|u_n| \sim \frac{A}{n^\alpha}$   $\alpha > 1$ . Alors.

$$|R_n| \leq \frac{A}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad (\text{A'obtient par une intégrale généralisée})$$

4°/  $\sum (-1)^n |u_n|$  où  $|u_n|$  décroît et tend vers 0.

Alors  $|R_N| \leq |u_{N+1}| \quad (*)$



## VI Propriétés d'associativité et de commutativité

### VI.1 Changement de l'ordre (Commutativité)

Théorème (Changement de l'ordre des termes d'une série)

Soit  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\mathbb{N}$  et  
Ait  $\sum u_n$  une série absolument convergente.

Alors, la série de terme général  $v_n = u_{\sigma(n)}$   
est absolument convergente et on a

$$\sum u_n = \sum u_{\sigma(n)}.$$

### VI.2 Regroupements des termes (associativité)

Théorème Soit  $\sum u_n$  une série absolument convergente.

On en distribue arbitrairement les termes de manière  
à former  $k$  séries  $\sum v_{n,1}, \sum v_{n,2}, \dots, \sum v_{n,k}$ .

Ces séries sont alors absolument convergentes et on a

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} v_{n,1} + \sum_{n \geq 0} v_{n,2} + \dots + \sum_{n \geq 0} v_{n,k}$$

## VII Produit de deux séries

Proposition Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries absolument  
convergentes. On note  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

Alors  $\sum_{n \geq 0} w_n$  est absolument convergente et

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \left( \sum_{n \geq 0} u_n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} v_n \right)$$

Remarques 1/  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$  est appelé produit de

convolution de  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à l'ordre  $n$ .

2/ On ne peut étendre le résultat de la proposition  
au produit de 2 séries absolument convergentes, aux  
séries semi-convergentes.





ETUSUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Diapo  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..